ϕ^4-KinkのEinstein Relation　～揺動散逸定理より～

東大・理　小 形 正 男，和 田　　靖

Krumhansl とSchrieffer の ϕ^4 系の統計力学以来，キンク（又はソリトン）の統計力学上の役割が明らかになってきた.[1] しかし，その動的な振舞いについては，未だわかっていない面が多い．低温ではキンクを自由粒子として扱う理想気体模型が提唱されている．しかし温度が高くなるにつれて，他の励起との相互作用の効果が顕著になる．特に熱励起されたフォノンとの衝突を考慮すると，キンクは自由運動せずに，ブラウン運動をすることがわかってきた．このブラウン運動には２つの機構が存在しているが，両者の間にどの様な関係があるか今までわかっていなかった．この関係をキンクに対する揺動散逸定理を調べることによって明らかにしようというのが今回の目的である．

キンクのブラウン運動における２つの機構

ϕ^4 系のハミルトニアンとキンク解を

$$H = A \int \frac{dx}{l} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{l_0^2}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - \frac{\omega_0^2}{4} \phi^2 + \frac{\omega_0^2}{8\phi_0^2} \phi^4 \right], \tag{1}$$

$$\phi_k(x) = \phi_0 \tanh(x/2d), \tag{2}$$

$$A = ml^2,\ d = l_0/\omega_0,$$

とする．キンクと波束フォノンとの衝突過程は，和田とSchrieffer [2] によって調べられた．彼らは低温領域を考えて以下の近似を行なった．(1)キンクの密度は小さいとし，キンク間相互作用は無視する．(2)熱励起フォノンの振幅は十分小さいと考えて，それに関する摂動で計算する．２次の計算の結果，衝突後キンクの中心がシフトすることが示された（図１）．熱平衡状態では熱励起されたフォノンがキンクに左右からランダムに衝突し，その度にキンクがシフトするので，その結果キンクはランダウムォーク的なブラウン運動をすると考えられる．この考えに従って，彼らは拡散係数を

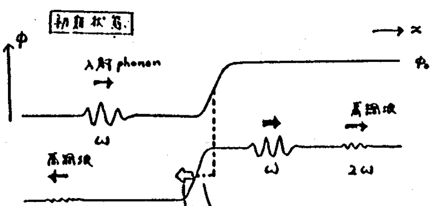

図１

$$D_{\mathrm{WS}} = \lim_{t\to\infty} < \delta^2(t) > / 2t, \quad (\delta(t) : \text{キンクのシフト}) \tag{3}$$

によって計算した．シフト$\delta(t)$はフォノンの振幅の２乗に比例するのでD_{WS}はT^2に比例する．（T：温度）詳しい計算によると

$$D_{\mathrm{WS}} = 2.06\,(k_{\mathrm{B}}T / m\ell\, d\omega_0^{\,2}\phi_0^{\,2})^2\, \mathrm{d}^2\omega_0, \tag{4}$$

となる.[2,3)]

一方４次のオーダーでは，キンク－フォノン間の運動量交換が生じる（図１）.[4)]通常のブラウン粒子の場合を思い出してみると，水分子との運動量交換は粒子に対する粘性抵抗を生ずる．この描像をϕ^4-キンクに対して適用することが許されるとすれば，４次の運動量交換はT^2に比例した粘性係数Γを生ずることになる．実際に我々は森[5)]の公式を用いてこのΓを計算し，

$$\Gamma = 0.1224\,(k_{\mathrm{B}}T / m\ell\, d\omega_0^{\,2}\phi_0^{\,2})^2\,\omega_0, \tag{5}$$

を得た.[6)]ブラウン粒子の場合のEinsteinの関係$D = k_{\mathrm{B}}T / M\Gamma$にこの粘性をあてはめると，$T^{-1}$に比例した拡散係数が得られる．これは(4)式の$D_{\mathrm{WS}}$と明らかに異なる．このことからキンクのブラウン運動に対しては２つの機構が共存しているといえる．１つは，２次のシフトから生じるランダムウォーク的なブラウン運動であり，もう１つは粘性と結びついたブラウン粒子的なブラウン運動である．

キンクに対する揺動散逸定理

上記の２つの機構の関係を揺動散逸定理によって明らかにしよう．以下計算の概略を示す．まずもとの場$\phi(x, t)$を

$$\phi(x, t) = \phi_K(x - X(t)) + \chi(x - X(t), t), \tag{6a}$$

を変換する．但し拘束条件

$$\int \chi(x - X(t), t)\, \frac{\partial \phi_K}{\partial x}(x - X(t))\, \mathrm{d}x = 0, \tag{6b}$$

を付ける.[7)]この変換によってキンクの中心座標$X(t)$が定義され，その運動方程式が得られる．次に$X(t)$に対して森[5)]の揺動力に関する公式を適用する．すると運動方程式は一般化されたLangevin方程式

$$\ddot{X}(t) = -\int_0^t \gamma(t-\tau)\dot{X}(\tau)\,d\tau + R(t), \tag{7}$$

$$R(t) = \exp(-itP'L)\ddot{X},$$

$$\gamma(t) = \langle R(t)R(0)\rangle / \langle \dot{X}\dot{X}\rangle,$$

$\langle\ \ \rangle$は初期値に関するカノニカル平均

$P' = 1 - P$, Pは$\dot{X}$への射影演算子

LはLiouville演算子,

に書き換えられる．さらに第一種揺動散逸定理

$$D(\omega) \equiv \int_0^\infty \langle \dot{X}(t)\dot{X}(0)\rangle e^{-i\omega t}dt = \langle \dot{X}\dot{X}\rangle / i\omega + \Gamma(\omega), \tag{8}$$

$$\Gamma(\omega) \equiv \int_0^\infty \gamma(t)e^{-i\omega t}dt, \tag{9}$$

が成り立つ．$\Gamma(\omega)$を低温展開し，$\omega\sim 0$の付近を調べると，

$$\Gamma(\omega) = \Gamma + i\omega A + D_{WS}\omega^2 / \langle \dot{X}\dot{X}\rangle + 0(\omega^3) \tag{10}$$

（Aは実の量でTに比例する）

を得る．これを(8)式に代入した式が低温，低振動数でのΓとDの関係を与える．$\omega\to 0$の極限ではEinsteinの関係$D(\omega=0) = k_BT/M\Gamma \propto T^{-1}$が成り立つ（$M = 2m\ell\phi_0^2/3d$：キンクの質量）．一方，有限の$\omega$で$T\to 0$の極限を考えると，$D(\omega) = k_BT/i\omega M + D_{WS} + \cdots$となり，実部の最低次が(4)式の拡散係数となっている（図２）．これからわかる様に，ωとTの領域によって観測されるブラウン運動のメカニズムが変わる．

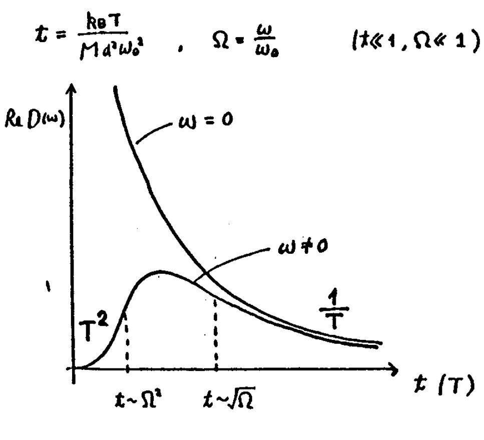

図2

実際に実験でこれらの効果が測定されるかどうかが興味ある問題である．ポリアセチレンに対するNMRの実験で，T_1の測定からスピンの拡散係数が得られる.[8] ここで測定されるスピンを，動いているソリトンの持つスピンとみなして，キンクのブラウン運動の理論と合わせようという試みがなされている．

参考文献

1) J. A. Krumhansl and J. R. Schrieffer, Phys. Rev. **B11** (1975) 3535.
2) Y. Wada and J. R. Schrieffer, Phys. Rev. **B18** (1978) 3897.
3) N. Theodorakopoulos, Z. Physik **B33** (1979) 385.
4) H. Ishiuchi and Y. Wada, Prog. Theor. Phys. **69** (1980) Supple. p242.
   M. Ogata and Y. Wada, J. Phys. Soc. Jpn. **53** (1984) 3855.
5) H. Mori, Prog. Theor. Phys. **33** (1965) 423.
6) M. Ogata and Y. Wada, submitted to J. Phys. Soc. Jpn.
7) この拘束条件は χ にGoldstoneモードが含まれないことを示している．この様なキンクの中心座標の導入の仕方は場の理論において発展したものでcollective coordinate methodと呼ばれる．Reviewとして
   R. Jackiw, Rev. Mod. Phys. **49** (1977) 681.
8) M. Nechtschein, F. Dewenx, F. Genoud, M. Guglielmi, and K. Holczer, Phys. Rev. **B27** (1983) 61.

Soliton系の統計力学
—— Ideal-Gas Phenomenologyと Bethe Ansatz Thermodynamics ——

常葉学園大　石　川　正　勝

京大基研　高　山　　　一

1. 序

古典可積分ソリトン系の ideal-gas phenomenology（IGP）を，すべての励起モード間相互作用による phase shift（又は spatial shift）からくる効果をself-consistentに取入れる[1]ことによって拡張する．その際，量子統計を用い半量子論的取扱いをする．そのように拡張されたIGPは対応する量子系のBethe仮設法による統計力学と等価であることが示される．しかる後に $\hbar \to 0$ の古典極限をとり古典系の拡張されたIGPを得る．

具体的には δ-関数型相互作用を持つ1次元Boseガス系と戸田格子を考える．

2. 拡張されたIGP

励起モードの分枝を添字 i で区別する．P_j-モードが励起されている為に P_i-モードの受け